1.黎曼流形

①来自百度的概念

黎曼流形(Riemannian manifold)是一黎曼度量下的微分流形（关于微分流形，可以看上一讲的内容），设M是n维光滑流形，若在M上给定一个光滑的二阶协变张量场g，则称呼(M,g)为一个n维流形，g称为该黎曼流形的基本张量或者黎曼张量，如果满足：

A)g是对称的，即：

$g(X,Y)=g(Y,X)(x,y\in T_pM,p\in M)$

B)g是正定的，即：

$g(X,X)\geqslant 0(X\in T_pM,p\in M)$

且等号仅在X=0的时候成立，

简单的来说，黎曼流形就是给定了一个光滑的对称的，正定的二阶张量场的光滑流形。

在微分流形以及黎曼几何中，一个黎曼流形是具有黎曼度量的微分流形，换句话说，这个流形上具有一个对成正定的二阶协变张量场，亦即在每一点的切空间配备一个正定二次型。

②一些来自中国的梅向明的《微分流形和黎曼几何》的常曲率黎曼流形

> 博主注：这里博主实际上并没有找到只关于“黎曼流形”的内容，我在这一本书中找到的实际上是关于“常曲率黎曼流形”，但实际上，在这一章节中很多讲的都是关于“常曲率黎曼流形”和“完备常曲率黎曼流形”，在这里博主就仅仅摘录一小段（常曲率黎曼流形）出来作为一些引申拓展，我在这里不抄录“完备常曲率黎曼流形”了

第十章　　常曲率黎曼流形

$\S 10.1$ 常曲率黎曼流形

定义6　黎曼流形(M,g)称为常曲率的，如果它的各点处所有平面截面的截面曲率等于相通的常数K，这时，局部地有

$$R_{ijkl}=-K(g_{ki}g_{jl}-g_{il}g_{jk})$$

所以$R_{ijkl;m}=0$，曲率张量场是平行的，因此，这黎曼流形是局部对称的。

设M是一个黎曼流形，U是M的一坐标域，局部坐标是$(x^1,\ldots\ldots,x^n)$，$\{e_1,\ldots\ldots,e_n\}$是U上的局部标准正交标架场，$(\omega^1,\ldots\ldots,\omega^n)$是对偶标架场，则$M$上有结构方程

$$d\omega^i=-\sum_j\omega^i_j\wedge\omega^j,\omega^i_j+\omega^j_i=0$$

$$d\omega^k_i+\sum_k\omega^k_i\wedge\omega^j_k=\Omega^j_i$$

其中

$$\Omega^j_i=\frac{1}{2}\sum_{k,l}R^j_{ikl}\omega^k\wedge\omega^l$$

如果M是长曲率的，注意现在

$$g_{ij}=g(e_i,e_j)=\delta_{ij}$$

$$\therefore R^j_{ikl}=R_{ijkl}=-K(\delta_{ik}\delta_{jl}-\delta_{il}\delta_{jk})$$

$$\Omega^j_i=K\omega^i\wedge\omega^j$$

实例:

（1）n维度欧式空间$R^n, K=0$;

（2）R^{n+1}中的单位球面S^n，$K=+1$;

（3）双曲空间H^n，命M是R^n的上半平面$=\{x\in R^n: x^n>0\}$带有黎曼度量（注意M只用一个坐标域覆盖）

$ds^2=\frac{1}{(x^n)^2}\{(dx^1)^2+...+(x^n)^2\}$，即$g_{ij}=\frac{1}{(x^n)^2}\delta_{ij}$命$\{e_i=x^n\frac{\partial}{\partial x^i}(i=1,...,n)\}$这是$M$上的标准正交标架场，对偶标价场是$\{\omega^i=(x^n)^{-1}dx^i, i=1,......,n\}$容易证明:

$$\omega^j_i=\delta_{nj}\omega^i-\delta_{ni}\omega^j$$

满足结构方程

$$d\omega^i=\sum_j\omega^j\wedge\omega^i_j, \omega^j_i+\omega^i_j=0$$

$$\Omega^j_i=d\omega^j_i+\sum_k\omega^k_i\wedge\omega^j_k=-\omega^i\wedge\omega^i$$

$$K=-1$$

2.度量空间

①来自苏联(C.C.C.P.)的Д.В.Кангороеич和Г.П.Акилов的《泛函分析》（引用的是第二版，第一版书的中文翻译是《赋范空间中的泛函分析》）

§3. 度量空间

3.1. 度量空间是一类非常重要的拓扑空间，集合X叫做度量空间，如果每一对元素$x,y\in X$都对应一个实数$\rho(x,y)$（元素x与y之间的距离），满足条件:

1）$\rho(x,y)\geqslant 0$;当且仅当$x=y$时$\rho(x,y)=0$;

2）$\rho(x,y)=\rho(y,x)$

3）对于任何$z\in X$,$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)$（三角不等式）

所引进的函数$\rho: X\times X\to R$叫做度量，n维度欧式几何空间R^n直线段，圆周（如果取点之间最短弧的长度作为圆周上的距离）等可以作为最简单的度量空间的例子

设X是具有度量ρ的度量空间，集合

$$K_\varepsilon(X_0)=\{x\in X:\rho(x,x_0)\leqslant\varepsilon\}$$

叫做以点$x_0 \in X$为中心$\varepsilon > 0$为半径的开球$K_{1/n}(x)(n \in N, x \in X)$

集合

$$B_\varepsilon(x_0) = \{x \in X : \rho(x, x_0) \leqslant \varepsilon\}$$

叫做以点$x_0 \in X$为中心的$\varepsilon > 0$为半径的闭球（下面通常简称为球）

定理1. 集合$K_{1/n}(x)(n \in N, x \in X)$的总体满足2.3.中的条件1)-3)，即构成集合$X$中的基底

证. 因为$\rho(x, x) = 0$，所以条件1）显然成立，如果$n, m \in N$且$p = max(n, m)$，则$K_{1/p}(x) \subset K_{1/n}(x) \subset K_{1/m}(x)$，于是，条件2）成立，如果$V_x = K_{1/n}(x)$，则令$V_x' = K_{1/(2n)}(x)$便有$V_x' \subset V_x$，此外，如果$y = V_x'$且$V_y = K_{1/(2n)}(y)$，则$V_y \subset V_x$，因为三角不等式，对于任何$z \in V_y$，有$\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z) < 1/(2n) + 1/(2n) = \frac{1}{n}$.由此可见，条件3）成立.

在定理2.1中挺进的构造，用典型的方式把度量空间X变为以开球为基底的空间，定理1也指出，X中的每个点都具有可数的基底.所以，为了描述X中的拓扑，只须限于收敛序列（见2.6,性质6）.我们指出，在所得拓扑空间中$x_n \to x$当且仅当$\rho(x_n, x) \to 0$.

其拓扑是由某种度量生成的拓扑空间叫做可度量化的（绝不是所有的拓扑空间都是可度量化的；这种空间的例子我们将在下面看到），应该指出，同一个拓扑可以由不同的度量生成.

定理2. 1）$\rho(x, y)$是其变元的连续函数，即如果$x_n \to x_0, y_n \to y_0$，则$\rho(x_n, y_n) \to \rho(x_0, y_0)$

2)度量空间是Hausdorff空间（因而收敛序列只能有一个极限）.

证. 1） 由三角形不等式得关系式

$$\rho(x', y') - \rho(x, y) \leqslant \rho(y, y') + \rho(x, x').$$

交换x, y与x', y'的位置，得到相反符号的不等式，由此

$$|\rho(x', y') - \rho(x, y)| \leqslant \rho(x, x') + \rho(y, y') \qquad (1)$$

利用此式，得

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_0, y_0)| \leqslant \rho(x_n, x_0) + \rho(y_n, y_0) \to 0.$$

2) 如果$x \neq x_0$，则$e = \rho(x, x_0)/2 > 0$，由三角形不等式推得，开球$K_\varepsilon(x)$和$K_\varepsilon(x_0)$不相交.

下面我们需要点到集合$E \subset X$的距离的概念，如同在欧式空间一样，我们把这个量定义为

$$\rho(x_0, E) = inf_{x \in E} \rho(x_0, x).$$

不难看出，$\rho(x_0, E) = 0$等价于$x_0 \in \bar{E}$

设X_0是度量空间X中的集合，因为对于集合X中德每一对元素都定义了距离，所以对于X_0中的元素对也定义了距离，显然，它满足度量空间的公理1)-3),从而X_0自然成为度量空间，这时我们就称在X_0中的度量是由空间X的度量诱导而得到的，或者称呼空间X_0是度量空间的X的子空间

假设在两个度量空间X和Y的元素之间可以建立一一对应，使得空间X和Y对应的元素之间的距离相等，这样的空间叫做等距的，显然，在等距空间之一中具有的所有的度量关系，在另一个中也同样成立，因此，这样的空间之间的差别仅在于元素的具体性质，而不涉及与空间的距离有关的本质，这种情况为把等距的空间等同起来提供了根据.

> 博主注：

事实上，对于这句话"使得空间X和Y对应的元素之间的距离相等"，我想必然有人要问如何计算度量空间之间的距离，不同的空间有不同的距离计算方法，所以有不同的度量空间，比如欧式空间，离散空间，可测函数和序列空间中的距离定义是不同的

3.2. 现在引进比较复杂的度量空间的例子，在本书中以函数作为元素的空间起着主要的作用，这里及以后，已经某个以数值函数为元素的空间X时，如果没有相反的约定，我们总是同时考虑两个空间：由满足相应条件的实函数全体组成的实空间X以及由同样满足条件的复函数全体组成的复空间X，这两种空间在表示上照例是不加区分的，如果在某一个命题中，我们没有提到空间是实的或者复的，则表明这个命题在两种情况都成立.

1）设K是紧空间，空间$C(K)$是紧空间K上所有连续函数的集合，其中函数x和y之间的距离由下式定义：

$$\rho(x,y)=sup_{t\in K}|x(t)-y(t)|$$

验证条件1)-3)并不困难，因此我们忽略了，因为紧空间上的连续函数达到其最大值（见定理2.6），所以也可以写为

$$\rho(x,y)=max_{t\in K}|x(t)-y(t)|.$$

空间$C(K)$中元素序列$\{x_n\}$收敛于点x_0表示函数列$\{x_n(t)\}$，一致收敛于函数$x_0(t)$.事实上，如果按任意$\varepsilon>0$选取N，使得当$n\geqslant N$的时候有$\rho(x_n,x_0)<\varepsilon$，则表示对这样的$n$

$$sup_{t\in K}|x_n(t)-x_0(t)|<\varepsilon$$

从而对于所有的$t\in K$，不等式

$$|x_n(t)-x_0(t)|<\varepsilon \qquad (n\geqslant N)$$

成立，由此推得要证明的一致收敛性.

反之亦然：从连续函数一致收敛于连续函数推得在空间$C(K)$中对应元素的收敛性。如果$K=[a,b]$，则记为$C[a,b]$.

2）空间s是所有数列的集合，其中数列$x=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_k,...)$与$y=(\eta_1,\eta_2,...,\eta_k,...)$之间的距离用以下的定义：

$$\rho(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\xi_k-\eta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|}$$

验证度量空间的公理1)与2)并没有困难，由于函数$\varphi(\lambda)=\frac{\lambda}{1+\lambda}$当$\lambda\geqslant 0$时递增，所以有数值不等式

$$\frac{|\alpha+\beta|}{1+|\alpha+\beta|}\leqslant\frac{|\alpha|+|\beta|}{1+|\alpha|+|\beta|}\leqslant\frac{|\alpha|}{1+|\alpha|}+\frac{|\beta|}{1+|\beta|} \qquad (2)$$

从而推出条件3)成立.

如果序列$\{x_n\}\ (x_n=(\xi_1^{(n)},\xi_2^{(n)},...,\xi_1^{(n)},...),n=1,2,...)$收敛于元素$x_0=(\xi_1^{(0)},\xi_2^{(0)},...,\xi_k^{(0)},...)$，则表示

$$lim_{n\to\infty}\xi_k^{(n)}=\xi_k^{(0)} \quad (k=1,2,...) \quad (3)$$

即s中点的序列的收敛是按坐标收敛，也就是点x_n的每个坐标都收敛于极限点x_0的对应的坐标.

事实上，由不等式

$$\frac{1}{2^k}\frac{|\xi_k^{(n)}-\xi_k^{(0)}|}{1+|\xi_k^{(n)}-\xi_k^{(0)}|}\leqslant\rho(x_n,x_0) \qquad (k=1,2,...)$$ \((4)\)

知，如果$x_n \to x_0$，则得$\xi_k^{(n)} \to \xi_k^{(0)} \quad (k=1,2,...)$

反之，如果条件(3)成立，由于级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k^{(n)}-\xi_k^{(0)}|}{1+|\xi_k^{(n)}-\xi_k^{(0)}|} = \rho(x_m, x_0)$$

关于n一致收敛（$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$是它的强级数），故可以逐项极限，且因级数的每一项都趋于0，所以$\rho(x_n, x_0) \to 0$

由上面的证明可以推导出，空间s是可数的直线族的拓扑积.

我们还指出空间$C^{(1)}[a,b]$（为了和复空间C^n区分开来，这里我们对上指标加上圆括号），其元素是定义在$[a,b]$上且在此区间上有直到l阶连续导数的函数，$x,y \in C^l[a,b]$之间的距离可以定义为：

$$\rho(x,y) = \sum_{k=0}^{l} max_{a \leqslant t \leqslant b} |x^{(k)}(t) - y^{(k)}(t)|$$

$$(x^{(0)}(t) = x(t), y^{(0)}(t) = y(t)).$$

$C^{(l)}(a,b)$中的收敛表示函数序列以及$k(1 \leqslant k \leqslant l)$阶导数序列都一致收敛

我们也可以研究空间$C^{(1)}(D)$，它是由多维空间的区域D内自身以及直到l阶的偏导数都连续的函数所组成（见$(IV.4.4)$.）

我们指出，如果在$C(K)$中引进序：$x \geqslant y$当且仅当对于任何$t \in K$有$x(t) \geqslant y(t)$而在s中约定，$x=(\xi_k)_{k=1}^{\infty} \geqslant (\eta_k)_{k=1}^{\infty}$当且仅当对于任何$k \in N$有$\xi_k \geqslant \eta_k$，则$C(K)$与$s$称为有序集（但不是全序的）

②来自百度的定义

度量空间也称为距离空间，一种拓扑空间，其上的拓扑由距离决定，设R是一个非空集合，$\rho(x,y)$是R上的二元函数，满足以下条件：

1.$\rho(x,y) \geqslant 0$且$\rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$

2.$\rho(x,y)=\rho(y,x)$

3.$\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z)+\rho(y,z)$

则称$\rho(x,y)$为两点x,y之间的距离，R按距离ρ成为度量空间或距离空间，记为(R,ρ)，设A是R的子集

3.度量

①来自百度的定义：

度量，也就是距离函数，是度量空间中满足特定条件的特殊函数，一般用d来表示，度量空间也被称为距离空间，是一类特殊的拓朴空间。

详细定义：

设X为一个非空集合，其元叫做点，$\mathbb{R}$是全体实数的集。

若函数$d: X \times X \to \mathbb{R}$对于任意$x,y,z \in X$满足条件；

（a） $d(x,y) \geqslant 0$，当且仅当$x=y$时候成立；（这个就是正定性）

(b) $d(x,y)=d(y,x)$； （对称性）

(c) $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$; （三角不等式）

则称呼函数d为集合X上的一个距离函数或者度量，赋予度量d的集合X称为度量空间，记为(X,d)

4.黎曼度量

①来自百度的定义

每个光滑流形都配有黎曼度量

定义一：

设M为光滑流形，则M上的黎曼度量为M上光滑对称共变2张量场，且在M上每个点均为正定

定义二：

设M为光滑流形，则M上的黎曼度量为M上每点p给定切空间T_pM上的内积，且在M上各点光滑

②来自中国的伍鸿熙的《黎曼几何初步》的关于黎曼度量的内容

C^∞流形M上一个黎曼度量g是什么呢？我们帮助大家回忆一下定义，g是一个"C^∞指定"。"指定"的含义就是对于M的每一个切向量空间$M_x(x\in M)$，指定M_x中的一个向量内积$g_x(,)$（有时候$g_x(,)$，记录为$<,>_x$，类似地有时记$g(,)$为$<,>$）所谓指定的C^∞的，那表示：对M的任意一个局部坐标系$(x^1,x^2,...,x^n)$，如今

$$g_{ij}(x)=g_x(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}),$$

则这些$g_{ij}(x)$是坐标$(x^1,...,x^n)$的C^∞函数，在此提醒注意：$g_x(,)$是内积这一事实相当于矩阵$[g_{ij}(x)]_{1\leqslant i,j\leqslant n}$是正定对称的，如果用张量的语言来说，$g$其实就是$M$上一个$C^\infty$流形上总可以找到一个黎曼度量（参阅[CC]，第130页定理1.1）

> 博主注：
> 1.勘误"（参阅[CC],第133页定理1.1）"为"（参阅[CC]，第130页定理1.1）"，这里参阅的书籍是陈省身的《微分几何讲义》

> **参见的陈省身的《微分几何讲义》部分**
>
> 定理1.1 在m维光滑流形M上必有黎曼度量
>
> 证明　取M的局部有限的坐标覆盖$\{(U_a;u_a^i)\}$，设$\{h_a\}$是从属的单位分解，使得支集$supph_a\subset U_a$.命
>
> $$ds_a^2=\sum_{i=1}^m(du_a^i)^2, \qquad (1.9)$$
> $$ds^2=\sum_a h_a\cdot ds_a^2, \qquad (1.10)$$
>
> 其中$h_a\cdot ds_a^2$定义为
>
> $$(h_a\cdot ds_a^2)(p)=\begin{cases}h_a(p)ds_a^2, p\in U_a,\\ 0, p\in U_a,\end{cases} \qquad (1.11)$$
>
> 它们是M上的光滑的二次微分式.因为在每一点$p\in M,(1,10)$式右端只是有限项的和，所以该式是有意义的，实际上，若取p的一个坐标域$(U;u^i)$使得$\bar{U}$是紧致的，由于$\{U_a\}$的局部有限性，所以U只与其

中有限多个成员$U_{a_1},\dots,U_{a_r}$相交，因此(1.10)式限制在U上成为

$$ds^2=\sum_{\lambda=1}^r h_{a_\lambda}\cdot ds^2_{a_\lambda}=g_{ij}du^i du^j$$

其中

$$g_{ij}=\sum_{\lambda=1}^r\sum_{k=1}^m h_{a_\lambda}\frac{\partial u^k_{a_\lambda}}{\partial u^i}\frac{\partial u^k_{a_\lambda}}{\partial u^j} \qquad (1.12)$$

因为$0\leqslant h_a\leqslant 1,\sum_a h_a=1$，故有某一指标$\beta$，使$h_\beta(p)>0$于是

$$ds^2(p)\geqslant h_\beta\cdot ds^2_\beta.$$

由此可见，ds^2在M上处处是正定的.

注记 在流形上黎曼度量的存在性并非平凡的结果，例如，M上不一定存在非正定的黎曼度量（但这一点较难证明），从纤维丛的观点看，在M上存在黎曼度量，说明M上对称的二阶协变张良从必有正定的光滑截面，然而，对于任意的矢量丛，处处不为零的光滑截面却不一定存在.

下面假定M是广义黎曼流形，在局部坐标系改变时，基本张量G的分量变换公式是

$$g^{ik}g_{kj}=g_{jk}g^{ki}=\delta^i_j \qquad (1.13)$$

那么，容易证明g^{ij}的坐标变换公式是

$$g'^{ij}=g^{kl}\frac{\partial u'^i}{\partial u^k}\frac{\partial u'^j}{\partial u^l} \qquad (1.14)$$

因此(g^{ij})是对称的二阶反变相量.

借助与基本张量，可以把切空间的余切空间等同起来，因而反变矢量和协变矢量可以看做是同一个矢量的不同表现形式，实际上，若$X\in T_p(M)$，命

$$a_X(Y)=G(X,Y),Y\in T_p(M), \qquad (1.15)$$

则a_X是$T_p(M)$上的线性函数，即$a_X\in T^*_p(M)$.反过来，因为G是非退化的，所以$T^*_p(M)$中任意一个元素都可以表成a_X的形式，这样，对应$X\mapsto a_X$在$T_p(M)$和$T^*_p(M)$之间建立了同构，用分量表示，若

$$X=X^i\frac{\partial}{\partial u^i},a_X=X_i du^i,$$

则从(1.15)式可以得到

$$X_i=g_{ij}X^j,X^j=g^{ij}X_i. \qquad (1.16)$$

此外，可以直接验证，如果(X^i)是反变矢量，则由(1.16)式定义的(X_i)遵从协变矢量的交换规律.

一般地，若(t^i_{jk})是$(1,2)$型张量，则

$$t_{ijk}=g_{il}t^l_{jk},t^{ij}_k=g^{jl}t^i_{lk} \qquad (1.17)$$

分别是$(0,3)$型张量和$(2,1)$型张量.如(1.17)式给出的运算通常称为张量指标的下降或上升.

连续统

①来自百度的定义

简单的来说，举个例子，我们说"实数集内实数可以连续变动"，我们则称"实数集"为"连续统"，"平面是二维的连续统"，"空间是三维的连续统"，更加严格的描述需要序理论和拓扑学的数学工具，连续统指的是"连续不断的数集"

一）连续统在数序中的定义

与区间$(0,1)$对等的集合就叫做连续统，对等就是找到了一个映射，使得他们之间的元素满足一一映射

二）连续统在集合论中的定义与性质

在集合论中，连续统是一个拥有多于一个元素的线性序集，而且其序满足如下性质：

稠密：在任意两个元素之间存在第三个元素

无洞：由上界的非空子集一定有上确界，实数集即为连续统的例子，实际上它是连续统的原型

以下是连续统的例子：

序结构与实数集同构（序同构）的集合，例如在实数集和里面的任何开区间扩展实数轴，以及序同构域它的，比如单位区间。实的半开半闭区间如$(0,1]$等，以及其序同构，拓扑学有一种比实数还要长的“长线”非标准分析中的超实数集。

切向量

①来自百度的定义

曲线在一点处的切向量可以理解为沿曲线该点处切线方向的向量.

切向量是与曲线相切的向量，给定曲线C上一点P，Q是C上与P的邻近一点，当Q点沿曲线趋近于P时，割线PQ的极限位置称为曲线C在P的切线

导子

设m为微分流形M中的一点，则m的切向量为m点的光滑函数芽F_m的导子

光滑曲线

光滑曲线$c: l \to M$在t点的切向量定义为$\dot{c}(t) := c_{*t}D(t)$，则对$\varphi \in \mathfrak{F}M$，

$\dot{c}(t)(\phi) = c_{*t}D(t)(\phi) = D(t)(\phi°c) = (\phi°c)'(t)$

②来自美国的Martin M. Lipschutz的《Theory and problems of Differential Geometry》（纲要式丛书《Schaum's Outline Series》之一）

> 博主注：
> 这里博主采用参考的是于1989年9月出版的《微分几何的理论和习题》的中文翻译版本，由黄锦能，杨正清，李世杰先生翻译，左再思先生提出有益的建议，曾如皋好麦兆娴先生发现漏洞并作出改正

1.单 位 切 向 量

设$X = X(s)$是正则曲线C的自然参数表示，导数$dX/ds = \dot{X}(s)$用以确定C在点$\dot{X}(s)$的切线方向，这与我们的几何直觉相符，因为

$$\dot{X}(s) = lim_{\Delta s \to 0}\frac{X(s+\Delta s)-X(s)}{\Delta s}$$

且$\frac{X(s+\Delta s)-X(s)}{\Delta s}$是$C$的割线方向，如图4-1所示，又因为对自然参数表示$|dX/ds| = |\dot{X}| = 1$，所以向量$\dot{X}$还具有单位长度

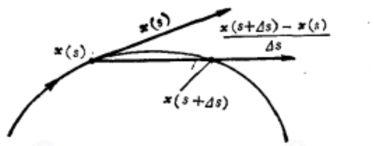

图 4-1

若$X = X(s^*)$是C的另一个自然参数表示，则由定理3.4，$s = \pm s^*$+常数且

$$\frac{dX}{ds^*}=\frac{dX}{ds}\frac{ds}{ds^*}=\pm\frac{dX}{ds},$$

即dX/ds^*与dX/ds有相同或者相反的方向，它取决于$X=X(s^*)$的定向，于是$\dot{X}$是定向的，在图4-1中，它的正向是s增加的方向

向量$\dot{X}(s)$称为定向曲线$X=X(s)$在$X(s)$的单位切向量，并记作$t=t(s)=\dot{X}(s)$

例**4.1**　沿着螺线$X=a(cost)e_1+a(sint)e_2+be_3,a,b\neq 0$，有

$$\frac{dX}{dt}=-a(sint)e_1+a(cost)e_2+be_3$$

且$|\frac{dX}{ds}|=(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}$，于是

$t=\frac{dX}{ds}=\frac{dX}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}=\frac{dX}{dt}/\frac{ds}{dt}=\frac{dX}{dt}/|\frac{dX}{dt}|=(a^2+b^2)^{-1/2}(-a(sint)e_1+a(cost)e_2+be_3),$

这里用到$ds/dt=|dX/dt|$（定理3.4），我们看到，沿着这条螺线单位切向量t和x_3轴交成定角$\theta=arccos(t\cdot e_s)=arccosb(a^2+b^2)^{-\frac{1}{2}}$

如同单位切向量一样，沿着曲线的其他几何量也可用自然参数表示来确定，然而，像上面的例子，运用链法则和关系式$ds/dt=|dX/dt|$，这些量亦可以用其他参数表出。

设$X=X(t)$是C的任意参数表示且与$X=X(s)$有相同的定向，则

$$X'=\frac{dX}{dt}=\frac{dX}{ds}\frac{ds}{dt}=t|\frac{dX}{dt}|=t|X'|,$$

其中再次用到$ds/dt=|dX/dt|$，于是t与X'有相同的，即它也是曲线的切向量，并且

$$t=X'/|X'| \qquad (4.1)$$

切空间

①来自百度的定义

切空间是在某一点所有的切向量组成的线性空间。切空间是微分流形在一点处所联系的向量空间，是欧式空间中光滑曲线的切线、光滑曲面的切平面的推广。

代数几何定义

设V为由根理想生成元$F_1,...,F_r$定义的仿射簇，则V在点p的切空间为线性簇

$T_pV=\mathbb{V}(dF_1|_p(x-p),...,dF_r|_p(x-p))$

该切空间与生成元的选取无关

②来自梅向明的《微分流形和黎曼几何》的定义

$\S 2.2$ **切空间与切映射**

1.R^n中一点处的切向量

设a是R^n中的一点，所谓a点附近的C^∞函数f是指定义在a的某个邻域U上的C^∞函数，我们在a点附近的所有的C^∞函数中定义一种等价关系：函数$f \sim g$，当且仅当在a的某点邻域中$f \equiv g$.用$[f]$表示f代表的等价类，每个等价类为a点处一个C^∞函数芽(germ)。a点处的全体C^∞函数芽的集合用$C^\infty(a)$来表示。

定义1 $[f]+[g]=[f+g]$

$$k[f]=[kf], k \in R$$

即由a点邻域函数的运算诱导处函数芽得到运算，因此，a点处C^∞函数芽构成向量空间

如果再定义

$$[f]\cdot[g]=[f\cdot g]$$

则$C^\infty(a)$构成实数域上的代数。

为了书写方便，以后用到芽$[f]$时，省去括号只写f

在R^n中以a点为起点的全体向量构成一个n维向量空间，即

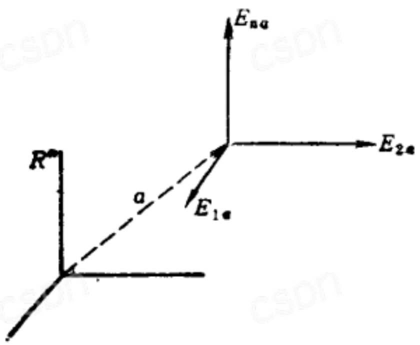

图 2.6

R^n在a点处的切空间，集成$T_a(R^n)$。显然有同构关系

$$T_a(R^n) \cong R^n$$

设$E_{1a}, E_{2a}, ..., E_{na}$表示由原$R^n$中标准正交基平移到$a$所得到的$T_a(R^n)$的一组标准正交基，则$T_a(R^n)$中任一向量$X_a$可以表示为、

$$X_a = \sum_{i=1}^n a^i E_{ia}$$

设$f \in C^\infty(a)$，用$\Delta f = \sum_{i=1}^a a^i \frac{\partial f}{\partial x^i}|_a$来表示函数$f$在$a$点沿方向$X_a$的方向导数。因为$\Delta f$依赖于$f$，点$a$及方向$X_a$，因此用$X_a^* f$表示更好，这样

$$X_a^* f = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial f}{\partial x^i}|$$

当X_a给定后，任一$f \in C^\infty(a)$唯一地确定了一个实数$X_a^* f$。因此$f \to X_a^* f$定义了映射

$$X_a^* : C^\infty(a) \to R$$

用$X_a^*=\sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_a$表示这个映射是合理的，我们称$X_a^*$为$X_a$方向的方向导子，由于$X_a^*(x^i)=a^i$,所以只要知道$X_a^*$在坐标函数$x^i=r^i(x)$上的值，向量$X_a$和映射$X_a^*$就完全确定了。

由于导数的性质，容易看出，如果$\alpha,\beta\in R$，$f,g\in C^\infty(a)$，则

(1)$X_a^*(\alpha f+\beta g)=\alpha(X_a^* f)+\beta(X_a^* g)$,

(2)$X_a^*(f\cdot g)=(X_a^* f)g(a)+f(a)(X_a^*)$.

2.导子空间

定义2　命$\mathfrak{D}(a)$表示具有上述性质（1）、（2）的映射$C^\infty(a)\to R$的全体，即

$$\mathfrak{D}(a)=\{D:C^\infty(a)\to R\text{满足条件（1）、（2）}\}$$

这些$D\in\mathfrak{D}(a)$称为$C^\infty(a)\to R$的导子(derivation)

如果对于$\forall D_1,D_2\in\mathfrak{D}(a);\alpha,\beta\in R,f\in C^\infty(a)$,定义

$$(\alpha D_1+\beta D_2)f=\alpha D_1 f+\beta D_2 f$$

其中右边的运算是在R中进行的，那么容易证明$\mathfrak{D}(a)$是实数域R上的向量空间，我们称它的**导子空间。**

定理1　$T_a(R)\approx\mathfrak{D}(a)$（向量空间的同构）

为了证明定理，先给出两个引理

引理1　命D是$\mathfrak{D}(a)$中任一导子，$f\in C^\infty(a)$是a的某领域中的常值函数，则$Df=0$.

证明：因为D是线性的，只须证明：如果1表示取值为1的常函数，则$D1=0$。注意

$$D1=D(1\cdot 1)=(D1)\cdot 1+1\cdot(D1)=2D1,\therefore D1=0.||$$

引理2　命$f(x^1,...,x^n)$是在某开集U上定义的C^∞一函数，如果$a\in U$，则存在a的一个领域$B\subset U$，以及定义在B上的C^∞一函数$g^1,...,g^n$,使得

(1)$g^i(a)=\frac{\partial f}{\partial x^i}|_{x=a}$,

(2)$f(x^1,...,x^n)=f(a)+\sum_{i=1}^n(x^i-a)g^i(x)$.

证明：命$B\subset U$是a的一个球域，注意对于$x\in B$

$$f(x)=f(a)=\int_0^1\frac{\partial}{\partial t}f(a+t(x-a))dt$$

因此，

$$f(x)=f(a)+\sum_{i=1}^n(x^i-a^i)\int_0^1(\frac{\partial f}{\partial x^i})_{a+t(x-a)}dt$$

命

$$|g^i(x)\int_0^1(\frac{\partial f}{\partial x^i})_{a+t(x-a)}dt,i=1,...,n$$

这些是C^∞函数且满足要求的两个条件。||

定理的证明：由于给定了$X_a^* \in T_a(R^n)$，就唯一确定了$X_a^* \in \mathfrak{D}(a)$，这样决定了一个映射

$$T_a(R^n) \to \mathfrak{D}(a)$$

（1）此映射是一一的。因为，如果有$X_a^* = Y_a^*$，则对于$\forall f \in C^\infty(a)$，有$X_a^* = Y_a^*$，也别对坐标函数$x^j$有

$$X_a^*(x^j) = Y_a^*(x^j)$$

设$x_a = \sum_{i=1}^n a^i E_{ia}, Y_a = \sum_{i=1}^n \beta^i E_{ia}$则

$$X_a^*(x^i) = \sum a^i \frac{\partial x^j}{\partial x^i} = a^j$$

$$Y_a^*(x^i) = \sum \beta^i \frac{\partial x^j}{\partial x^i} = \beta^j$$

$$\therefore \alpha^j = \beta^j \text{即} X_a = Y_a$$

（2）此映射保持代数结构。若$Z_a = \alpha X_a + \beta Y_a; \alpha, \beta \in R$，则对任意的$f \in C^\infty(a)$，有

$$Z_a^*(f) = (\alpha X_a + \beta Y_a)^* f$$

$$= \sum_{i=1}^n (\alpha \alpha^i + \beta \beta^i) \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

$$= \alpha X_a^* f + \beta Y_a^* f$$

$$= (\alpha X_a^* + \beta Y_a^*) f$$

（3）此映射是在上的，即要证明对于$\forall D \in \mathfrak{D}(a)$，存在$X_a \in T_a(R^*)$，使得$X_a^* = D$

任给$D \in \mathfrak{D}(a)$，设$r^i(x^1, ..., x^n) = x^i, i = 1, ..., n$是坐标函数，再设$Dr^i = a^i$，考虑向量$X_a = \sum_{i=1}^n a^i E_{ia}$，它对应的导子为$X_a^*$，有

$$X_a^* f = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial f}{\partial x^i}|$$

另一方面，根据引理2，在f的定义域中的某个开球B上，有

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^n (x^i - a^i) g^i(x)$$

所以

$$Df = Df(a) + \sum_{i=1}^n \{D(x^i - a^i) g^i(a) + 0 \cdot Dg^i(x)\}$$

$$= \sum_{i=1}^n Dx^i \cdot g^i(a) = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial f}{\partial x^i}|_a = X_a^* f$$

由于f是任意的，所以$D = X_a^*$||

定理允许我们把R^n在一点a处的切空间$T_a(R^n)$与导子空间$\mathfrak{D}(a)$等同起来，在这种等同下，$T_a(R^n)$的标准基$E_{1a}, ..., E_{na}$等同于$\frac{\partial}{\partial x^1}|_a, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}|_a$，其中$\frac{\partial}{\partial x^i}|_a$是在坐标轴方向上的方向导子，即

$$E_{ia}x \mapsto E^*_{ia} = \frac{\partial}{\partial x^i}|_a$$

做了这种等同之后，可以将*号去掉，$X^*_a f$将写成$X_a f$，今后欧氏空间给了我们关于在一点切空间的几何直观，而在形式定义和证明中。我们将利用上面对的思想：在一点的一个切向量，是在$C^\infty(a)$上的满足导子乘积法则（也称为Leibniz法则）的线性算子。对于切向量的这种观点，除了它的形式化和抽象性外，它相对地更容易运用，我们将利用这种观点吧切向量推广到微分流形上。

3.流形上的切向量

定义3　M是C^∞的n维流形，$a \in M$，$C^\infty(a)$是a点处全体C^∞实函数芽的集合，则M在a点的切向量是实值函数

$$X_a : C^\infty(a) \to R$$

满足

$(1) X_a(\alpha f + \beta g) = \alpha X_a f + \beta X_a g$

$(2) X_a(f \cdot g) = (X_a f) \cdot g(a) + f(a)(X_a g)$

其中$\alpha, \beta \in R; f, g \in C^\infty(a)$

定义4　M在a点的全体切向量的集合记成$T_a(M)$或M_a或$T(M, a)$。当规定

$$(X+Y)f = Xf + Yf$$

$$(bX)f = b(Xf)$$

运 算法 则后，$T_a(M)$构成向量空间，称为M在a点的切空间

不难验证此定义是合理的。

下面要给出切向量在局部坐标系下的坐标表示。

设(U, φ)是包含a点的局部坐标系，其中坐标为$(x_1, ..., x_n), i = a, ..., n, f \in C^\infty(a)$定义

$$(\frac{\partial}{\partial x^i})_n f = \frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial r^i}(\varphi(a))$$

其中r^i是R^n中的坐标函数，容易验证$(\frac{\partial}{\partial x^i})_a$是$M$在$a$点处的切向量。

引理8　设$x^1, ..., x^n$是$U \ni a$的局部坐标，且使$x^i(a) = 0, i = 1, ..., n$。则对于$\forall f \in C^\infty(a)$，存在$n$个函数$f_1, ..., f_n \in C^\infty(a)$使得

$$f_i(a) = (\frac{\partial}{\partial x^i})_n f$$

而且在a的某个邻域中

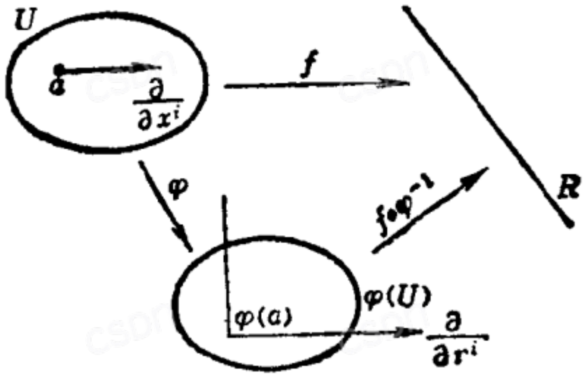

图 2.7

$$f = f(a) + \sum_{i=1}^{n} x^i f_i$$

证明可参看引理2

定理2 设M是C^∞流形，点$a \in M$附近的局部坐标为$(x_1, ..., x_n)$，如果$x_a \in M_a$，则

$$X_a = \sum_{i=1}^{n} (X_a x^i)(\frac{\partial}{\partial x^i})$$

而且$\{(\frac{\partial}{\partial x^i}), i = 1, ..., n\}$形成$M_a$的一组基

证明：设$X_a \in M_a, f \in C^\infty(a)$，在局部坐标系下，如果$x^i(a) \neq o, i = 1, ..., n$可令$y^i = x^i - x^i(a)$，则$y^i(a) = 0, i = 1, ..., n$而且

$$(\frac{\partial f}{\partial y^i})_a = (\frac{\partial f}{\partial x^i})_a$$

设$c \in C^\infty(a)$的常值函数芽，则

$$X_a(c) = cX_a(1) = cX_a(1) + cX_a(1) = 2cX_a(1) = 2X_a(c)$$

$$\therefore X_a(c) = 0$$

再根据引理3：

$$X_a f = X_a[f(a) + \sum_{i=1}^{n} y^i \cdot f_i]$$

$$= X_a[f(a)] + \sum_{i=1}^{n} [(X_a y^i) f_i(a) + y^i(a)(X_a f_i)]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} X_a(x^i - x^i(a)) f_i(a)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (X_a x^i)(\frac{\partial f}{\partial x^i})$$

$$\therefore X_a=\sum_{i=1}^{n}(X_a x^i)(\frac{\partial f}{\partial x^i})$$

最后在证明$\{(\frac{\partial}{\partial x^i})_a, i=1,...n\}$是线性无关的就够了，设

$$Y_a=\sum_{i=1}^{n}\alpha^i(\frac{\partial}{\partial x^i})_a=0$$

则

$$Y_a x^j=a^j=0, j=1,...n$$

所以，$\{(\frac{\partial}{\partial x^i}), i=1,...,n\}$线性无关，构成$M_a$的一组基

由此可见,n维流形在器上任一点处存在唯一的切空间，在局部坐标系下，它是由$(\frac{\partial}{\partial x^i})_a, i=1,...,n$为基张成的n维向量空间，由于我们采取了“导子”的抽象定义，显而易见，切向量与切空间的概念与坐标系的选取无关，在不同的局部坐标系下，他们只不过有不同的坐标表示罢了

设U,V是M的局部坐标域，且$U\cap V\neq\Phi$，并且$(x^1,...,x^n)$是(U,φ)的坐标函数，$(y^1,...,y^n)$是(V,ψ)的坐标函数，则在$a\in U\cap V$处，对于$f\in C^\infty(a)$

$$\frac{\partial}{\partial x^j}(f)=\frac{\partial}{\partial r^j}(f\circ\varphi^{-1})$$

$$=\frac{\partial}{\partial r^j}(f\circ\psi^{-1}\circ\psi\circ\varphi^{-1})$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial r^i}(f\circ\psi^{-1})\circ\frac{\partial}{\partial r^i}(r^i\circ\psi\circ\varphi^{-1})$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\cdot\frac{\partial f}{\partial y^i}$$

这就是坐标变换之下基变换的公式。

积流形

积流形是由两个微分流形的笛卡尔积所形成的流形

来自百度的概念

这边给出的定义就是“两个微分流形的笛卡尔积”

那么什么是笛卡尔积呢?

笛卡尔积指的是数学中，两个集合X和Y的笛卡尔，又称直积，记录为$X\times Y$，第一个对象是X的成员二第二个对象是Y的所有可能有序对的其中一个成员

假设集合$A=\{a,b\}$，集合$B=\{0,1,2\}$则两个集合的笛卡尔乘积为$\{(a,0),(a,1),(a,2),(b,0),(b,1),(b,2)\}$

列维-奇维塔联络

①来自百度的定义

列为奇维塔联络联络，在黎曼几何中，是切丛上的无绕率联络，它保持黎曼度量（或伪黎曼流形）不变，在黎曼流形和伪黎曼流形的理论中，共变导数一词经常用于列维奇维塔联络，联络的空间坐标表达式为克里斯托菲尔符

定义

配有$<\cdot,\cdot>$的黎曼流形M的等距无扰联络∇定义为

$<\nabla_x Y, Z> = \frac{1}{2}\{X<Y,Z> + Y<Z,X> - <X,[X,Y]> + <Y,[Z,X]>\}$，则称$M$的列维奇维塔联络

②来自中国徐森林的《流形》

> 博主注:
> Emmmmm，其实博主一直打算的是直接截图贴上去，而不是再浪费时间在打字一边，但是我不再打字一边的话，很多书籍因为扫描文件的问题，很多字母区分不开来，如i和j，l和i，所以我自己再打一遍也是校对，也是在加深学习的印象，但是这本书扫描的还行，而且公式太多了，我不是太想用LaTeX打出来了，所以就在这里截图贴上来了。

§3 Levi-Civita 联络

设∇为n维C^∞流形M的切丛TM上的线性联络．§ 2 例 4 构造了余切丛T^*M上的线性联络，而例 5 构造了切丛TM的张量丛$\otimes^{r,s}TM$上的线性联络．为方便，将这联络仍记为∇．现在我们用另一方式加以叙述．令

$$\nabla:\ C^\infty(TM)\times C^\infty(\otimes^{r,s}TM)\to C^\infty(\otimes^{r,s}TM),$$

$$(X,\theta)\mapsto\nabla(X,\theta)=\nabla_X\theta.$$

(1) $\nabla_X f = Xf,\quad f\in C^\infty(M,\mathbf{R})=C^\infty(\otimes^{0,0}TM)$;

(2) $\nabla_X Y$由TM上的线性联络∇给出，$Y\in C^\infty(TM)=C^\infty(\otimes^{1,0}TM)$;

(3) $(\nabla_X\theta)(Y)=X\theta(Y)-\theta(\nabla_X Y),\qquad \theta\in C^\infty(T^*M)=C^\infty(\otimes^{0,1}TM),Y\in C^\infty(TM)=C^\infty(\otimes^{1,0}TM)$;

(4) $(\nabla_X\theta)(W_1,\cdots,W_r;Y_1,\cdots,Y_s)=\nabla_X(\theta(W_1,\cdots,W_r;Y_1,\cdots,Y_s))-\sum_{i=1}^{r}\theta(W_1,\cdots,W_{i-1},\nabla_X W_i,W_{i+1},\cdots,W_r;Y_1,\cdots,Y_s)$

$-\sum_{j=1}^{s}\theta(W_1,\cdots,W_r;Y_1,\cdots,Y_{j-1},\nabla_X Y_j,Y_{j+1},\cdots,Y_s)$,

$\theta\in C^\infty(\otimes^{r,s}TM),\ W_i\in C^\infty(T^*M)=C^\infty(\otimes^{0,1}TM),Y_j\in C^\infty(TM)=C^\infty(\otimes^{1,0}TM)$.

为得到∇的性质，我们先定义收缩映射．

定义1 设$\{e_k\}$为n维实向量空间V的基，$\{e^k\}$为其对偶基，V^*为V的对偶空间．定义收缩映射

$$C^i_j:\otimes^{r,s}V\to\otimes^{r-1,s-1}V,$$

使得对任何$W_i \in V^*$, $i=1,\cdots,r-1$, $Y_j \in V$, $j=1,\cdots,s-1$,

$$(C_j^i\theta)(W_1,\cdots,W_{r-1};Y_1,\cdots,Y_{s-1})=\sum_{k=1}^n \theta(W_1,\cdots,W_{i-1},e^k,$$
$$W_i,\cdots,W_{r-1};Y_1,\cdots,Y_{j-1},e_k,Y_j,\cdots,Y_{s-1}).$$

引理1 C_j^i与$\{e_k\}$, $\{e^k\}$的选取无关.

证明 设$\{\bar{e}_k\}$, $\{\bar{e}^k\}$为另一组对偶基, 且$\bar{e}_h=\sum_{l=1}^n c_h^l e_l$, $\bar{e}^h=\sum_{k=1}^n d_k^h e^k$, 则

$$\begin{aligned}
&\sum_{h=1}^n \theta(W_1,\cdots,W_{i-1},\bar{e}^h,W_i,\cdots,W_{r-1};Y_1,\cdots,Y_{j-1},\bar{e}_h,\\
&\quad Y_j,\cdots,Y_{s-1})\\
&=\sum_{h=1}^n \theta(W_1,\cdots,W_{i-1},\sum_{k=1}^n d_k^h e^k,W_i,\cdots,W_{r-1};Y_1,\cdots,Y_{j-1},\\
&\quad \sum_{l=1}^n c_h^l e_l,Y_j,\cdots,Y_{s-1})\\
&=\sum_{k,l=1}^n\left(\sum_{h=1}^n c_h^l d_k^h\right)\theta(W_1,\cdots,W_{i-1},e^k,W_i,\cdots,W_{r-1};Y_1,\cdots,\\
&\quad Y_{j-1},e_l,Y_j,\cdots,Y_{s-1})\\
&=\sum_{k,l=1}^n \delta_k^l\theta(W_1,\cdots,W_{i-1},e^k,W_i,\cdots,W_{r-1};Y_1,\cdots,Y_{j-1},e_l,\\
&\quad Y_j,\cdots,Y_{s-1})\\
&=\sum_{k=1}^n \theta(W_1,\cdots,W_{i-1},e^k,W_i,\cdots,W_{r-1};Y_1,\cdots,Y_{j-1},e_k,\\
&\quad Y_j,\cdots,Y_{s-1}).\qquad \#
\end{aligned}$$

注1 可以证明

$$C_j^i(X_1\otimes\cdots\otimes X_r\otimes W_1\otimes\cdots\otimes W_s)$$
$$=W_j(X_i)X_1\otimes\cdots\otimes\hat{X}_i\otimes\cdots\otimes X_r\otimes W_1\otimes\cdots\otimes\hat{W}_j\otimes\cdots\otimes W_s,$$

这公式也可作为 C_j^i的定义.

此外,关于 $C_j^i\theta$的分量有

$$(C_j^i\theta)^{l_1\cdots l_{r-1}}_{m_1\cdots m_{s-1}}=(C_j^i\theta)(e^{l},\cdots,e^{l_{r-1}};e_{m_1},\cdots,e_{m_{s-1}})$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\theta(e^{l_1},\cdots,e^{l_{i-1}},e^k,e^{l_i},\cdots,e^{l_{r-1}};\ e_{m_1},\cdots,e_{m_{j-1}},e_k,$$
$$e_{m_j},\cdots,e_{m_{s-1}})$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\theta^{l_1\cdots l_{i-1}kl_i\cdots l_{r-1}}_{m_1\cdots m_{j-1}km_j\cdots m_{s-1}}.$$

引理2 (1) $\nabla_X f\in C^\infty(M,R)=C^\infty(\otimes^{0,0}TM)$, $\nabla_X Y\in C^\infty(TM)=C^\infty(\otimes^{1,0}TM)$, $\nabla_X\theta\in C^\infty(\otimes^{r,s}TM)$, 其中$f\in C^\infty(M,R)$, $X,Y\in C^\infty(TM)$, $\theta\in C^\infty(\otimes^{r,s}TM)$;

(2) ∇为$\otimes^{r,s}TM$上的线性联络;

(3) $\nabla_X:C^\infty(\wedge^r T^*M)\longrightarrow C^\infty(\wedge^r T^*M)$, 其中$C^\infty(\wedge^r T^*M)$为$TM$上的 r 阶C^∞外形式的全体;

(4) $\nabla_X(\theta+\eta)=\nabla_X\theta+\nabla_X\eta$, $\theta,\eta\in C^\infty(\otimes^{r,s}TM)$;

(5) $\nabla_X(\theta\otimes\eta)=(\nabla_X\theta)\otimes\eta+\theta\otimes\nabla_X\eta$, $\theta\in C^\infty(\otimes^{r,s}TM)$, $\eta\in C^\infty(\otimes^{h,t}TM)$
(导性);

(6) $\nabla_X(\alpha\wedge\beta)=(\nabla_X\alpha)\wedge\beta+\alpha\wedge(\nabla_X\beta)$, $\alpha\in C^\infty(\wedge^r T^*M)$,
$\beta\in C^\infty(\wedge^s T^*M)$;

(7) $\nabla_X\circ C_j^i=C_j^i\circ\nabla_X$.

证明 (1) $\nabla_X f\in C^\infty(M,R)=C^\infty(\otimes^{0,0}TM)$, $\nabla_X Y\in C^\infty(TM)=C^\infty(\otimes^{1,0}TM)$是显然的. 因为对任何 $f\in C^\infty(M,R)$有

$$(\nabla_X\theta)(fY)=X\theta(fY)-\theta(\nabla_X(fY))=(Xf)\theta(Y)+fX\theta(Y)$$
$$-\theta((Xf)Y+f\nabla_X Y)=f(X\theta(Y)-\theta(\nabla_X Y))=f(\nabla_X\theta)(Y),$$

$$
\begin{aligned}
&(\nabla_X\theta)(W_1,\cdots,W_{i-1},fW_i,W_{i+1},\cdots,W_r;Y_1,\cdots,Y_s)\\
=&\nabla_X(\theta(W_1,\cdots,W_{i-1},fW_i,W_{i+1},\cdots,W_r;Y_1,\cdots,Y_s))\\
&-\sum_{l=1}^{i-1}\theta(W_1,\cdots,W_{l-1},\nabla_XW_l,W_{l+1},\cdots,W_{i-1},fW_i,W_{i+1},\cdots,\\
&\quad W_r;Y_1,\cdots,Y_s)\\
&-\theta(W_1,\cdots,W_{i-1},\nabla_X(fW_i),W_{i+1},\cdots,W_r;Y_1,\cdots,Y_s)\\
&-\sum_{l=i+1}^{r}\theta(W_1,\cdots,W_{i-1},fW_i,W_{i+1},\cdots,W_{l-1},\nabla_XW_l,\\
&\quad W_{l+1},\cdots,W_r;Y_1,\cdots,Y_s)\\
&-\sum_{j=1}^{s}\theta(W_1,\cdots,W_{i-1},fW_i,W_{i+1},\cdots,W_r;Y_1,\cdots,Y_{j-1},\nabla_XY_j,\\
&\quad Y_{j+1},\cdots,Y_s)\\
=&f(\nabla_X\theta)(W_1,\cdots,W_r;Y_1,\cdots,Y_s)+(Xf)\theta(W_1,\cdots,W_r;Y_1,\cdots,\\
&Y_s)-(Xf)\theta(W_1,\cdots,W_r;Y_1,\cdots,Y_s)\\
=&f(\nabla_X\theta)(W_1,\cdots,W_r;Y_1,\cdots,Y_s).
\end{aligned}
$$

类似可得到

$$
\begin{aligned}
&(\nabla_X\theta)(W_1,\cdots,W_r;Y_1,\cdots,Y_{j-1},fY_j,Y_{j+1},\cdots,Y_s)\\
=&f(\nabla_X\theta)(W_1,\cdots,W_r;Y_1,\cdots,Y_s)
\end{aligned}
$$

关于加法的线性性是明显的，因此，$\nabla_X\theta\in C^\infty(\otimes^{r,s}TM)$.

(2) 由§2例4和∇为TM上的线性联络，下面可验证∇: $C^\infty(TM)\times C^\infty(\otimes^{r,s}TM)\to C^\infty(\otimes^{r,s}TM)$, $(X,\theta)\mapsto\nabla_X\theta(r,s\geqslant 1)$为线性联络. 从定义，显然$\nabla_X\theta$关于$X$是$C^\infty(M,\mathbf{R})$线性的，关于$\theta$是$\mathbf{R}$线性的. 剩下须证的是对任何$f\in C^\infty(M,\mathbf{R})$，有

$$
\begin{aligned}
&(\nabla_X(f\theta))(W_1,\cdots,W_r;Y_1,\cdots,Y_s)\\
=&\nabla_X(f\theta(W_1,\cdots,W_r;Y_1,\cdots,Y_s))\\
&-\sum_{i=1}^{r}f\theta(W_1,\cdots,W_{i-1},\nabla_XW_i,W_{i+1},\cdots,W_r;Y_1,\cdots,Y_s)
\end{aligned}
$$

$$-\sum_{j=1}^{s} f\theta(W_1,\cdots,W_r;Y_1;\cdots,Y_{j-1},\nabla_X Y_j,Y_{j+1},\cdots,Y_s).$$

$$=((Xf)\theta+f\nabla_X\theta)(W_1,\cdots,W_r;Y_1,\cdots,Y_s),$$

即 $\nabla_X(f\theta)=(Xf)\theta+f\nabla_X\theta$.

(3) 由 $\theta\in C^\infty(\wedge^r T^*M)$ 的反称性和 $\nabla_X\theta$ 的定义立即有 $\nabla_X\theta\in C^\infty(\wedge^r T^*M)$.

(4) 由 $\nabla_X\theta$ 的定义.

(5) 当 $r=0$ 或 $s=0$ 时,公式显然成立.

当 $r,s\geqslant 1$ 时,有

$$(\nabla_X(\theta\otimes\eta))(W_1,\cdots,W_r,\overline{W}_1,\cdots,\overline{W}_h;Y_1,\cdots,Y_s,\overline{Y}_1,\cdots,\overline{Y}_t)$$

$$=\nabla_X(\theta(W_1,\cdots,W_r;Y_1,\cdots,Y_s)\cdot\eta(\overline{W}_1,\cdots,\overline{W}_h;\overline{Y}_1,\cdots,\overline{Y}_t))$$

$$-\sum_{i=1}^{r}\theta(W_1,\cdots,W_{i-1},\nabla_X W_i,W_{i+1},\cdots,W_r;Y_1,\cdots,Y_s)\cdot \eta(\overline{W}_1,\cdots,\overline{W}_h;\overline{Y}_1,\cdots,\overline{Y}_t)$$

$$-\sum_{j=1}^{s}\theta(W_1,\cdots,W_r;Y_1,\cdots,Y_{j-1},\nabla_X Y_j,Y_{j+1},\cdots,Y_s)\cdot \eta(\overline{W}_1,\cdots,\overline{W}_h;\overline{Y}_1,\cdots,\overline{Y}_t)$$

$$-\sum_{k=1}^{h}\theta(W_1,\cdots,W_r;Y_1,\cdots,Y_s)\cdot\eta(\overline{W}_1,\cdots,\overline{W}_{k-1},\nabla_X\overline{W}_k, \overline{W}_{k+1},\cdots,\overline{W}_h;\overline{Y}_1,\cdots,\overline{Y}_t)$$

$$-\sum_{l=1}^{t}\theta(W_1,\cdots,W_r;\ Y_1,\cdots,Y_s)\cdot\eta(\overline{W}_1,\cdots,\overline{W}_h;\overline{Y}_1,\cdots,\overline{Y}_{l-1}, \nabla_X\overline{Y}_l,\overline{Y}_{l+1},\cdots,\overline{Y}_t)$$

$$=((\nabla_X\theta)\otimes\eta+\theta\otimes\nabla_X\eta)(W_1,\cdots,W_r,\overline{W}_1,\cdots,\overline{W}_h;Y_1,\cdots,Y_s, \overline{Y}_1,\cdots,\overline{Y}_t),$$

即 $\nabla_X(\theta\otimes\eta)=(\nabla_X\theta)\otimes\eta+\theta\otimes\nabla_X\eta$.

(6) $\nabla_X(\alpha\wedge\beta)=\nabla_X\left(\frac{(r+s)!}{r!s!}A(\alpha\otimes\beta)\right)$

$$=\nabla_X\left(\frac{1}{r!s!}\sum_{\pi}(-1)^{\pi}(\alpha\otimes\beta)^{\pi}\right)$$

$$=\frac{1}{r!s!}\sum_{\pi}(-1)^{\pi}\nabla_X(\alpha\otimes\beta)^{\pi}$$

$$=\frac{1}{r!s!}\sum_{\pi}(-1)^{\pi}(\nabla_X(\alpha\otimes\beta))^{\pi}$$

$$=\frac{1}{r!s!}\sum_{\pi}(-1)^{\pi}((\nabla_X\alpha)\otimes\beta+\alpha\otimes\nabla_X\beta)^{\pi}$$

$$=\frac{1}{r!s!}\sum_{\pi}(-1)^{\pi}((\nabla_X\alpha)\otimes\beta)^{\pi}+\frac{1}{r!s!}\sum_{\pi}(-1)^{\pi}(\alpha\otimes\nabla_X\beta)^{\pi}$$

$$=(\nabla_X\alpha)\wedge\beta+\alpha\wedge(\nabla_X\beta).$$

(7) 设$\{e_k\}$为TM的局部C^∞基向量场，$\{e^k\}$为其对偶基向量场. 因为

$$(\nabla_X e^k)(e_l)=Xe^k(e_l)-e^k(\nabla_X e_l)$$

$$=X\delta_l^k-e^k(\nabla_{\sum\limits_m a^m e_m}e_l)$$

$$=-e^k\left(\sum_m a^m\nabla_{e_m}e_l\right)=-e^k\left(\sum_{m,t}a^m\Gamma_{ml}^t e^t\right)$$

$$=-\sum_{m,t}a^m\Gamma_{ml}^t\delta_t^k=-\sum_m a^m\Gamma_{ml}^k,$$

$$\nabla_X e^k=-\sum_{m,l}a^m\Gamma_{ml}^k e^l.$$

又因 $\nabla_X e_k=\nabla_{\sum\limits_m a^m e_m}e_k=\sum\limits_{m,l}a^m\Gamma_{mk}^l e_l$, 故

$$\sum_k\theta(W_1,\cdots,W_{i-1},\nabla_X e^k,W_i,\cdots,W_{r-1};Y_1,\cdots,Y_{j-1},e_k,$$

$C_j^i\circ\nabla_X=\nabla_X\circ C_j^i$. #

定义2 设$(M,g)=(M,\langle,\rangle)$为$n$维$C^\infty$Riemann流形，如果$TM$上的线性联络$\nabla$还满足:

(4) 挠张量$T=0$,即对任何$X,Y\in C^\infty(TM)$,

$T(X,Y)=\nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,Y]=0$;

(5) 对任何$X,Y,Z\in C^\infty(TM)$,

$Z\langle X,Y\rangle=\langle\nabla_Z X,Y\rangle+\langle X,\nabla_Z Y\rangle$.

则称∇为$(M,g)=(M,\langle,\rangle)$上的**Riemann联络**或**Levi-Civita联络**.

光滑映射

①来自百度的定义

设M和N为光滑流形，U为M中开集，若对M,N的任意坐标映射$x,y,f:U\rightarrow N$满足$y\cdot f\cdot x^{-1}$为欧几里得空间的光滑函数，则称f为光滑映射

若A为M中任意子集，则$f:A\rightarrow N$若能扩张为$\bar{f}:U\rightarrow N$，其中U为M的开集，且$A\subset U$，则成为光滑映射

②来自中国苏况存的《流形的拓扑学》的定义

1.2　　光滑函数和光滑映射

我们以开始就说过，光滑流形是这样的空间，在它上面可以讨论光滑函数，做法是很清楚的，令M,N为光滑流形，$f:M\rightarrow N$。我们说f在$P\in M$点邻近是光滑的，如果有P点附近的坐标点(U,φ)和$Q=f(P)$点附近的局部坐标(V,ψ)使映射$\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$在$\varphi(p)$邻近光滑，这就是有意义的，因为我们谈的是欧氏空间之间的映射。相容性保证了这定义与所用的局部坐标无关，特别若是$N=R$，我们就不需要ψ而说有一个光滑函数$f:M\rightarrow R, \tilde{f}=f\circ\varphi^{-1}$是$f$的一个局部表示，若$\{(U_i,\varphi_i)\}$是覆盖$M$的一族局部坐标，就有定义$\varphi_i(U_i)$上的局部表示$\tilde{f}_i=f\circ\varphi_i^{-1}$，这些函数之间有以下关系

$$\tilde{f}_i=\tilde{f}_j\circ\varphi_{ji},$$

$\varphi_{ji}=\varphi_j\circ\varphi_i^{-1}:\varphi_i(U_i\cap U_j)\rightarrow\varphi_j(U_i\cap U_j)$成为局部坐标的迁移函数(transition funktion)，反之，若函数$\tilde{f}_i:\varphi_i(U_i)\rightarrow R$并是上述相容性条件成立，则定义在$U_i$上的局部函数$\tilde{f}_j\circ\varphi_i$在$U_i\cap U_j$上是相互协调的，从而定义了一个整体函数$f$，整体的函数时常是这样从相容的局部的东西“粘”出来的，既然$\tilde{f}_i$是定义在R^n的子集$\varphi_i(U_i)\subset R^n$上的，这就是经典的情况，但是采用整体的观点能对问题得到更好的展望，举例如下：

复变函数论中经典的Liouville定理指出，在平面C上全纯而且有界的函数必是常数（想到代数学基本定理可以由此推出，你们会同意这是一个重要的定理），下面是经典的证法，将f展开成为幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$$

它在全平面上收敛，取一个以$z=0$为心、r为半径的圆R，有

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_R\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz.$$

若$|f(z)|\leqslant M$，很容易估计出

$$|a_n|\leqslant\frac{M}{r^n}$$

既然r是任意的，当$n>1$时候有$a_n=0$，即$f(z)=a_0$是常数

我们要把Liouville定理作为解释为关于整体函数的一般事实，首先回顾一下可去奇点

引理　若$g(x)$在原点的邻域U中全纯但原点除外（即在$U-\{0\}$中全纯）而且当$z\rightarrow0$时$zg(x)\rightarrow0$，则$g(z)$可拓展为U的全纯函数。

证　拓展如下

$$g(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_R\frac{g(z)}{z}dz$$

R是围绕0的圆（例如参看Ahlfors[1]p/100，中译本 p.122）.

把s^2看成Riemann球：$C\cup\{\infty\}$，它有局部坐标$(U_1,\varphi_1),(U_2,\varphi_2)$，其中$U_1=C,\varphi_1:U_1\rightarrow C$为恒等映射，$U_2=(C-\{0\})\cup\{\infty\},\varphi:U_2\rightarrow C$为恒同映射，$U_2=(C-\{0\})\cup\{\infty\},\varphi_2:U_2\rightarrow C$定义为

$$\varphi_2(z)=\begin{cases}\frac{1}{z}, z\in C-\{=\},\\ 0, z=\infty,\end{cases}$$

我们看到，在$\varphi_1(U_1\cap U_2)=C-\{0\}$上，迁移函数$\varphi_{21}=\varphi_2\cdot\varphi_1^{-1}$正是

$$\varphi_{21}(z)=\frac{1}{z}, z\in C-\{0\}$$

因为在$C-\{0\}$上$z\neq 0$，φ_{21}是全纯的，这就使S^2成为一个复流形（Riemann球）

若f在全平面C上全纯，则它在$\varphi_1(U_1)$上定义局部函数f_1利用相容性，在$\varphi_2(U_1\cap U_2)=C-\{0\}$上定义$f_2$为

$$f_2(z)=f_1\circ\varphi_{12}(z)=f(\frac{1}{z}).$$

因为f有界，所以条件

$$lim_{z\to 0}f_2(z)=0$$

显然成立，于是f_2可拓展到$\varphi_2(U_2)$上，(f_1,f_2)定义一个S^2上的整体全纯函数$F:S^2\to C$

然而紧复流形上的任意整体全纯函数必定是以场数，因为一方面这种函数之模必有最大值（紧性），另一方面，极值原理指出，任意的局部极大值都不可能存在，这些例子也表明了群传理论和光滑理论根本不同，在紧光滑流形上当然有很多非常值的整体光滑函数。

我们又看到，已给一个光滑流形M，笛卡尔乘积$M\times M$也可构成光滑流形

定义　Lie群G既是一个群，作为一个空间的光滑流形，而且群运算

$(G_1)G\times G\to G,(g_1,g_2)\mapsto g_1g_2$

$(G_2)G\to G,g\mapsto g^{-1}$

是光滑映射

例如$G=GL(n)$是一个Lie群，条件(G_1)可从熟知的举证乘法公式

$$(AB)_{ij}=\sum_k A_{ik}B_{kj}$$

得出，$(AB)_{ij}$是A_{ik}和B_{kj}的光滑函数

现在我们可以形式地定义光滑流形的范畴：对光滑映射$f:M\to N$若有另一光滑映射$g:N\to M$使$f\circ g=id\ onN,g\circ f=id\ onM$,则$f$称为微分同胚(diffeomorphism)，这就是光滑流形范畴中的同构(isomorphism)。类似地，也有拓扑范畴中的同构（即同胚）、C^k范畴、C^∞范畴等都各有其范畴，这些理论的最终目的是解决两个对象的$(object)$同构与否，但是很少的几个例子就已看到，目前这还是一句空话，关于这一点，我们还得学习汗多只是才能谈到一点实质性的东西

> 博主注：这边还有最后一段最后提醒，但是没啥大用，所以就不引用了

向量的代数计算

来自中国杨文茂和李全英的《微分几何的理论与问题》的讲解

§1.1 向量的代数运算

一、内容提要

1. 向量的线性运算与向量的乘法运算

设 V^3 或 R^3 是一个 3 维的欧氏向量空间。我们用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\cdots$ 表示空间的向量，而用 $\lambda,\mu,\upsilon,\cdots$ 表示实数或纯量。下面将列举关于向量的线性运算与乘法运算，以及这些运算所具有的规律。

(1)线性运算及其运算规律

两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，从 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 到 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的运算称为加法。数量 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的积记为 $\lambda\boldsymbol{a}$，从 λ 与 $\boldsymbol{a}$ 到 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的运算称为数乘。向量的加法与数乘合称为向量的线性运算，具有如下运算规律。

加法交换律　　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

加法结合律　　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$

数乘结合律　　$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\mu\boldsymbol{a}$

数乘关于数的分配律　　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$

数乘关于向量的分配律　　$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$

(2)乘法运算及其运算规律

两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的乘法有两种，分别称为内乘或外乘，所得结果前者为一数量后者为一向量，分别称为内积与外积。

向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的内积记为 $\boldsymbol{ab}$ 或 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 或$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$，定义为

$$ab=|a|\cdot|b|\cos\langle a,b\rangle$$

其中$|a|$表示向量a的长度，$\langle a,b\rangle$表示a与b的夹角，$0\leqslant\langle a,b\rangle\leqslant\pi$

向量a与b的外积记为$a\times b$或$[a,b]$，定义为

(i) $|a\times b|=|a|\cdot|b|\sin\langle a,b\rangle$

(ii) $a\times b\perp a$且$a\times b\perp b$

(iii) a,b与$a\times b$依次成右手系

当a平行于b，规定$a\times b=0$

外积$a\times b$的长度为以a和b为边的平行四边形的面积。

三个向量a,b,c的混合积记为(a,b,c)或(abc)，或abc，它定义为

$$(a,b,c)=(a\times b)c$$

关于向量的乘法运算具有如下运算规律。

内积交换律　$ab=ba$

数乘与内积的结合律　$(\lambda a)b=a(\lambda b)=\lambda(ab)$

内积分配律　$a(b+c)=ab+ac$

数乘与外积的结合律　$(\lambda a)\times b=a\times(\lambda b)=\lambda(a\times b)$

外积分配律　$a\times(b+c)=a\times b+a\times c$

外积反交换律　$a\times b=-b\times a$

混合积关于三个向量改变次序的规律

$(a\times b)c=a(b\times c)$或　$(a,b,c)=(b,c,a)=(c,a,b)$

$(a,b,c)=-(b,a,c)=-(a,c,b)=-(c,b,a)$

混合积分配律　$(a_1+a_2,b,c)=(a_1,b,c)+(a_2,b,c)$

混合积的绝对值$|(a,b,c)|$为以a,b和c为棱的平行六面体的体积，而(a,b,c)的符号为正或负表示三个向量a,b,c依次构成右手系还是左手系。

2. 在正交坐标系中用坐标作向量的运算

设在欧氏空间 V^3 或 R^3 中选取正交标架 $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$，即基向量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 是正交单位且构成右手系的向量：

$$\boldsymbol{i}^2=\boldsymbol{j}^2=\boldsymbol{k}^2=1,\ \boldsymbol{jk}=\boldsymbol{ki}=\boldsymbol{ij}=0$$

$$(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})=1$$

对于任意向量 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，称 x,y,z 为 $\boldsymbol{a}$ 在正交标架中或正交坐标系中的坐标，记为 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$。

设向

$$\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1),\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$$

$$\boldsymbol{c}=(x_3,y_3,z_3),$$

利用坐标作向量的运算有如下公式

公式 1.1　两向量的和　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$

公式 1.2　数乘向量　$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1)$

公式 1.3　两向量的内积　$\boldsymbol{ab}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$

公式 1.4　两向量的外积

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}z_1 & x_1\\ z_2 & x_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\right)$$

公式 1.5　三向量的混合积

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$$

3. 三个向量构成正交基的条件

引理 1.6（用内积表示）　设在向量空间 V^3 中三个非零向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$，则

$$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\text{ 组成正交基}\Longleftrightarrow\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j=\delta_{ij},\quad i,j=1,2,3$$

$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 依次成右或左手系 $\longleftrightarrow (\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=1$ 或 -1

引理 1.7(用外积表示)　设在向量空间 $\boldsymbol{V}^3$ 中三个非零向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$,则

$$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3 \text{ 组成正交基} \longleftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2=\pm\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3=\pm\boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1=\pm\boldsymbol{e}_2 \end{cases}$$

$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 依次成右或左手系 $\longleftrightarrow$ 等式右边者取"+"或"−"。

4. 关于向量的一些公式

公式 1.8(*Cauchy−Schwarz* 不等式)　关于两个向量的内积,有

$$|\boldsymbol{ab}|\leqslant|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$$

当且仅当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行时,等号成立。关于两个向量的外积,也有

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$$

公式 1.9(三个向量的二重外积公式)

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{ac})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{ab})\boldsymbol{c}$$

公式 1.10(***Lagrange*** 公式)

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=\begin{vmatrix} \boldsymbol{ac} & \boldsymbol{ad} \\ \boldsymbol{bc} & \boldsymbol{bd} \end{vmatrix}$$

特别地,式中令 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}=\boldsymbol{d}$,得

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{c}^2-(\boldsymbol{ab})^2$$

公式 1.11(四个向量的三重外积公式)

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})\boldsymbol{a}$$

公式 1.12(四个向量的一个线性关系式)

$$(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{c},\boldsymbol{d},\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{d},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\boldsymbol{d}=0$$

公式 1.13(五个向量的一个数量式)

$$(\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{a}_4)(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_5)-(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{a}_4)(\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_5)$$

$$+(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_4)(\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{a}_5)-(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3)(\boldsymbol{a}_4\boldsymbol{a}_5)=0$$

公式 1.14(行列式乘法公式,六个向量的一个数量式)

$$(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3)(\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_3)=\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_3 \\ \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_3 \\ \boldsymbol{a}_3\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_3\boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{a}_3\boldsymbol{b}_3 \end{vmatrix}$$

公式 1.15(六个向量的一个数量式)

$$(\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1\times\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{c}_1\times\boldsymbol{c}_2)=\begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2) & (\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_2) \\ (\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_1) & (\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_2) \end{vmatrix}$$

公式 1.16(六个向量的一个数量式)

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}_1)(\boldsymbol{d},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}_2)-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}_2)(\boldsymbol{d},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}_1)$$
$$=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{d})(\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}_2)$$

5. 利用向量的运算表示它们之间平行,垂直或共面的条件

引理 1.17　向量 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\leftrightarrow\boldsymbol{ab}=0$

引理 1.18　向量 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$

引理 1.18′　向量 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\leftrightarrow\exists\lambda,\mu,(\lambda,\mu)\neq0$,使得

$$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=0$$

引理 1.19　向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面 $\leftrightarrow(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=0$

引理 1.19′　向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面 $\leftrightarrow\exists\lambda,\mu,j,(\lambda,\mu,j)\neq0$,使得

$$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+j\boldsymbol{c}=0$$

二、问题

1. 证明公式 1.8:$|\boldsymbol{ab}|\leqslant|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$$

2. 证明三角不等式

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$$
$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{c}|$$

3. 证明二重外积公式 1.9 与 *Lagranye* 公式 1.10 之间的等价性

4. 利用坐标法分别直接证明公式 1.9 与 1.10
5. 证明公式 1.11
6. 证明公式 1.12
7. 证明公式 1.13
8. 证明公式 1.14
9. 证明公式 1.15
10. 证明公式 1.16
11. 证明公式

$$(\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_3)\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{ab}_1)\boldsymbol{b}_2\times\boldsymbol{b}_3+(\boldsymbol{ab}_2)\boldsymbol{b}_3\times\boldsymbol{b}_1+(\boldsymbol{ab}_3)\boldsymbol{b}_1\times\boldsymbol{b}_2$$

12. 证明公式

$$(\boldsymbol{b}_1\times\boldsymbol{b}_2)(\boldsymbol{b}_3\times\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{b}_2\times\boldsymbol{b}_3)(\boldsymbol{b}_1\times\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{b}_3\times\boldsymbol{b}_1)(\boldsymbol{b}_2\times\boldsymbol{a})=0$$

13. 已知三个不共面的向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$,证明向量组

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3}{(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3)},\boldsymbol{e}_2=\frac{\boldsymbol{a}_3\times\boldsymbol{a}_1}{(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3)},\boldsymbol{e}_3=\frac{\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2}{(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3)}$$

满足公式

$$(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{a}_j)=\delta_{ij},i,j=1,2,3$$

向量的微分计算

§1.2 向量的微分运算

一、内容提要

1. 向量函数的求导及运算规律

设以纯量 $t\in I=[t_0,t_1]$为自变量的向量函数 $\boldsymbol{r}(t)\in V^3$,于是

$$\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t),z(t)),t\in I$$

向量 $\boldsymbol{r}(t)$对 t 的导数

$$\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}=\left(\frac{dx(t)}{dt},\frac{dy(t)}{dt},\frac{dz(t)}{dt}\right),t\in I$$

关于向量函数求导法则满足如下运算规律。设 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ 都是 t

的向量函数,而 λ 为 t 的纯量函数,则有

$$\frac{d}{at}(\boldsymbol{u}\pm\boldsymbol{v})=\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\pm\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$$

$$\frac{d}{at}(\lambda\boldsymbol{u})=\lambda\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}+\frac{d\lambda}{dt}\boldsymbol{u}$$

$$\frac{d}{at}(\boldsymbol{u}\boldsymbol{v})=\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$$

$$\frac{d}{at}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\times\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=(\frac{d\boldsymbol{u}}{dt},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})+(\boldsymbol{u},\frac{d\boldsymbol{v}}{dt},\boldsymbol{w})+(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\frac{d\boldsymbol{w}}{dt})$$

对于以多个纯量为自变量的多元向量函数,例如 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v),u\in[a,b],v\in[c,d]$,向量函数 $\boldsymbol{r}(u,v)$关于 u 或 v 求偏导的法则也具有如上运算规律。

引理 2.1 $\quad \boldsymbol{r}=\text{const}^* \quad \leftrightarrow \quad \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=0$

2. 向量函数的积分及运算规律

(1)不定积分

在 I 上的两个向量函数 $\mu(t)$与 $\mu(t)$,如果$\frac{d\boldsymbol{U}}{dt}=\boldsymbol{U}$,称 $\boldsymbol{U}$ 为 $\boldsymbol{u}$ 的原函数或不定积分,记为

$$\int\boldsymbol{u}(t)dt=\boldsymbol{U}(t)+\boldsymbol{c},$$

其中 $\boldsymbol{c}$=const.

求一个函数的不定积分的方法称为积分法或求积。关于求积有如下运算规律

$$\int[\boldsymbol{u}(t)\pm\boldsymbol{v}(t)]dt=\int\boldsymbol{u}(t)dt\pm\int\boldsymbol{v}(t)dt$$

$$\int c\boldsymbol{u}(t)dt=c\int\boldsymbol{u}(t)dt,c=\text{const}$$

* 关于此类等式,如果左边为向量(或纯量),则 const 表示常向量(或常数)。

$$\int c\boldsymbol{u}(t)dt = c\int \boldsymbol{u}(t)dt, c = \text{const}$$

$$\int \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{u}(t)dt = \boldsymbol{c} \times \int \boldsymbol{u}(t)dt, \boldsymbol{c} = \text{const}$$

(2)定积分

如果对于区间 $I=[a,b]$上的向量函数 $\boldsymbol{u}(t)$的积分和在 I 上分法无穷细密过程中有极限，则称这极限为函数 $\boldsymbol{u}$ 在 I 上的定积分，记为

$$\int_a^b \boldsymbol{u}(t)dt = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{i=1}^n \boldsymbol{u}(\xi_i)\triangle t_i$$

其中 T 表示分法

$$T: t_0 = a < t_1 < \cdots < t_i < \cdots < t_n = b$$

$$t_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant t_i, \triangle t_i = t_i - t_{i-1},$$

$$\lambda(T) = Max\triangle t_i, i = 1,2,\cdots,n$$

关于一个向量函数的定积分及其原函数之间有如下引理

引理 2.2　设 $\boldsymbol{U}(t)$为 $\boldsymbol{u}(t)$的一个原函数，则 $\boldsymbol{u}(t)$在$[a,b]$上的定积分

$$\int_a^b \boldsymbol{u}(t)dt = \boldsymbol{U}(b) - \boldsymbol{U}(a)$$

(3)向量函数的 Taylor 公式

对于纯量函数，在微分学中我们知道，不但有 Taylor 公式而且还有各种形式的中值定理。但是对于向量函数，中值定理一般不成立，但仍有如下 Taylor 公式

公式 2.3(Taylor)　设向量函数 $\boldsymbol{u}(t)$在区间 I 上存在直到 n 阶的连续导数。当 $t_0\in I, t_0+\triangle t\in I$，则有

$$\boldsymbol{u}(t_0 + \triangle t) = \boldsymbol{u}(t_0) + \boldsymbol{u}'(t_0)\triangle t + \frac{1}{2!}\boldsymbol{u}''(t_0)(\triangle t)^2 + \cdots$$

$$+ \frac{1}{n!}\boldsymbol{u}^{(n)}(t_0)(\triangle t)^n + \boldsymbol{\varepsilon}(\triangle t)^n$$

式中已记 $\boldsymbol{u}^{(i)}=\frac{d^i\boldsymbol{u}}{dt^i}$，$\boldsymbol{\varepsilon}$ 为满足 $\lim\limits_{\triangle t\to 0}\boldsymbol{\varepsilon}=0$ 的向量。

如果在正交坐标系中向量函数用坐标表示为

$$\boldsymbol{u}(t)=(x(t),y(t),z(t)),$$

上述公式也可写为

$$\boldsymbol{u}(t_0+\triangle t)=\boldsymbol{u}(t_0)+\boldsymbol{u}'(t_0)\triangle t+\frac{1}{2!}\boldsymbol{u}''(t_0)(\triangle t)^2+\cdots$$
$$+\frac{1}{(n-1)}\boldsymbol{u}^{n-1}(t_0)(\triangle t)^{n-1}+\frac{1}{n!}\boldsymbol{R}_n(\triangle t)^n$$

其中

$$\boldsymbol{R}_n=\{x^{(n)}(t_1),y^{(n)}(t_2),z^{(n)}(t_3)\}$$
$$t_0\leqslant t_1,t_2,t_3\leqslant t_0+\triangle t$$

虽然有

$$\lim_{\triangle t\to 0}\boldsymbol{R}_n=\boldsymbol{u}^{(n)}(t_0)$$

但一般说来 t_1,t_2,t_3 各不相同，没有一个适合三个函数 x,y,z 的中间值。

(4)几种特殊向量函数满足的微分方程

引理 2.4(定长向量函数)　设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(t)$ 是区间 I 上的可微函数，则

$$|\boldsymbol{u}|=\text{const}\leftrightarrow\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'=0,\forall t\in I$$

引理 2.5(定方向向量函数)　设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(t)$ 是区间上 I 的可微函数，则

$$\boldsymbol{u}\parallel\boldsymbol{c}=\text{const}\leftrightarrow\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{u}'=0,\forall t\in I$$

引理 2.6(平行于定平面的向量函数)　设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(t)$ 是区间 I 上二阶可微的向量函数，则

$$\boldsymbol{u}\parallel\pi(\text{固定的平面})\leftrightarrow(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}',\boldsymbol{u}'')=0,\forall t\in I$$

Frobenius定理

来自美国F.W.瓦内尔的《微分流形与李群基础》

1.60 定理(Frobenius)　令$\mathfrak{D}$是M^d上的一个c维的C^∞对合分布,令$m\in M$,那么存在$\mathfrak{D}$的一个过m的积分流形,实际上,存在一个以m为中心,以$x_1,\ldots,x_d$为坐标函数的立方体坐标系(U,φ)使得片

(1)　x_i=常数,所有$i\in\{c+1,\ldots,d\}$

都是$\mathfrak{D}$的积分流形,而且如果(N,ψ)是$\mathfrak{D}$连通积分流形使得$\psi(N)\subset U$,那么$\psi(N)$位于这些片之一中

> 我这次就没有讲解关于"外代数"的内容,因为个人认为外代数的内容更加复杂,而且其拓展出来的知识点将会更多,所以我在这里就省略了"外代数"的讲解，这一次拖更的太久了，实在抱歉，学业比较忙

资料来源：

1.黎曼流形_百度百科
2.黎曼度量_百度百科
3.知乎：关于Riemannian metric | 黎曼度量 - 知乎
4.《泛函分析》——[苏联] Д.В.Кангороеич和Г.П.Акилов
5.知乎：从三维空间衍生而来的数学空间——距离空间(度量空间) - 知乎
6.度量空间_百度百科

7.《黎曼几何初步》——[中国]伍鸿熙
8.《微分几何讲义》——[中国]陈省身
9.《微分流形和黎曼几何》——[中国]梅向明
10.列维奇维塔联络_百度百科
11.《流形》——[中国]徐森林
12.《微分流形初步》——[中国]陈维恒
13.《流形的拓扑学》——[中国]苏况存
14.《微分流形和李群基础》——[美国]F.W.瓦内尔